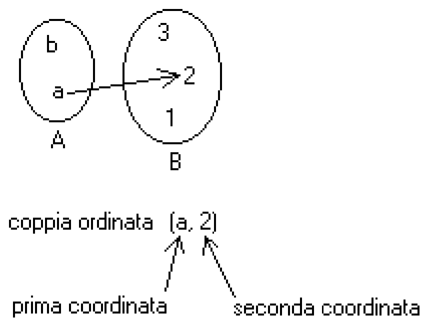
Relazioni

01 - Coppia ordinata.

Consideriamo l'insieme A = {a , b} e l'insieme B = {1 , 2 , 3} . Se prendiamo un elemento di A , per esempio a , ed un elemento di B , per esempio 2 , possiamo costruire la **coppia ordinata** :

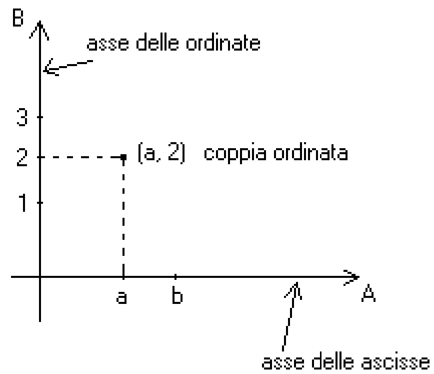
(a, 2)

dove **è essenziale l'ordine** con cui si scelgono gli elementi dai due insiemi. Il primo elemento della coppia ordinata, quello scritto a sinistra, si chiama **prima coordinata** mentre il secondo, quello scritto a destra, si chiama **seconda coordinata** :



Nei diagrammi di Venn una coppia ordinata viene rappresentata da una **freccia** che parte dalla prima coordinata della coppia ordinata e punta alla seconda coordinata della medesima.

Vi è un altro modo molto proficuo di rappresentare le coppie ordinate utilizzando gli **assi cartesiani** :



Sugli assi cartesiani una coppia ordinata viene rappresentata con un **punto** come illustrato in figura. Utilizzando gli assi cartesiani occorre sottolineare che l'insieme da cui si prendono le prime coordinate va posto sull'asse delle **ascisse** (l'asse **orizzontale**) mentre l'altro insieme, da cui si prendono le seconde coordinate, va posto sull'asse delle **ordinate** (l'asse **verticale**).

02 - Prodotto cartesiano.

L'insieme di **tutte le coppie ordinate** che si possono formare prendendo le prime coordinate dall'insieme A e le seconde coordinate dall'insieme B si chiama **prodotto cartesiano** di A per B e si indica con :

A x B .

Il prodotto cartesiano A x B è definito allora da :

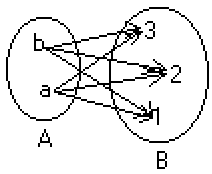
$$A \times B = \{(x, y); x \in A, y \in B\}$$

che si legge "il prodotto cartesiano dell'insieme A per l'insieme B è l'insieme di tutte le coppie ordinate che si ottengono prendendo la prima coordinata in A e la seconda coordinata in B ".

Considerando gli insiemi A e B definiti sopra si ha allora :

A x B = {(a , 1), (a , 2), (a , 3), (b , 1), (b , 2), (b , 3)} .

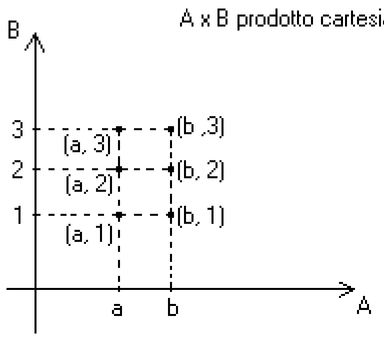
Graficamente, usando i diagrammi di Venn, il prodotto cartesiano A x B sarà visualizzato come :



A x B prodotto cartesiano di A per B

ovvero prendendo tutte le possibili frecce dagli elementi da A agli elementi di B .

Usando invece gli assi cartesiani si ottiene il seguente grafico :



dove si vede bene che le coppie ordinate del prodotto cartesiano sono indicate da **tutti i possibili punti** che si possono ottenere considerando gli elementi dei due insiemi.

03 - Relazione.

In matematica, il concetto di **relazione** è analogo a quello del linguaggio comune. Vi è una relazione quando elementi di un insieme sono **legati** in qualche modo con elementi di un altro insieme. Gli elementi dei due insiemi possono essere di **qualunque tipo** ed il legame fra loro può essere di qualsiasi natura.

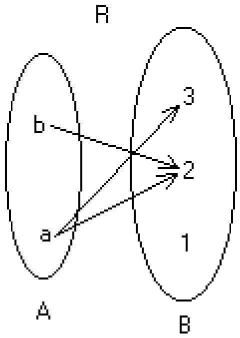
In matematica, però, abbiamo bisogno di una definizione di relazione che sia chiara, univoca e che sia espressa nei termini della teoria degli insiemi. Definizioni intuitive, lacunose ed imprecise non sono ammissibili.

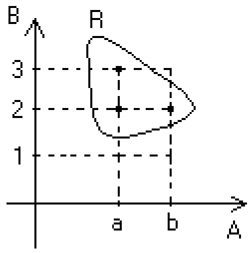
Una **relazione** fra due insiemi, in matematica, è semplicemente un **sottoinsieme del prodotto cartesiano** fra i due insiemi. Una relazione è quindi un **insieme**, ovvero un oggetto del tutto definito, per il quale non è possibile alcuna ambiguità ed imprecisione.

Per esempio, rispetto agli insiemi A e B degli esempi precedenti, possiamo definire la relazione :

R = {(a , 2), (a , 3), (b , 2)}

che è palesemente un sottoinsieme di A x B e la possiamo visualizzare nei due modi :





Fra i due modi di visualizzazione, quello che utilizza gli assi cartesiani è di gran lunga il più "elegante" ed "espressivo". D'ora in poi preferiremo in generale la rappresentazione cartesiana.

Presentiamo due esempi di relazione partendo da casi "concreti".

- 1 - Consideriamo l'insieme C formato dai componenti il nostro corso di cultura scientifica di base presenti la sera del 12/12/03. Per comodità rappresentiamo le persone (gli elementi di C) con le lettere dell'alfabeto a, b, c, ... limitando il numero delle persone a 6. Si ha allora :

  C = {a, b, c, d, e, f} .

  Supponiamo di considerare la relazione "essere stati in montagna a fare trekking assieme" e chiamiamo questa relazione M .

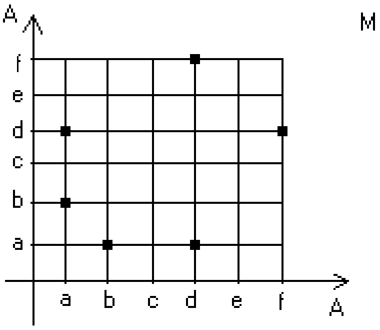
  Supponiamo che a sia stato in montagna con b e con d (separatamente), e che d lo sia stato con f . Naturalmente sarà anche che b lo è stato con a , d con a e f con d . Non sarà però che a è stato in montagna con f !!!

  Per fare una relazione ci vogliono due insiemi. In questo caso abbiamo a disposizione il solo insieme C per cui la relazione M sarà una relazione fra C e C (fra C e se stesso), cioè un sottoinsieme del prodotto cartesiano C x C .

  La relazione M sarà allora :

  M = {(a, b), (a, d), (d, f), (b, a), (d, a), (f, d)}.

  Riportiamo questa relazione M nel grafico :



- 2 - Consideriamo i seguenti insiemi formati da nomi di persona :

N1 = {sandro, luca, maria} e N2 = {mario, aldo, franca, marina}.

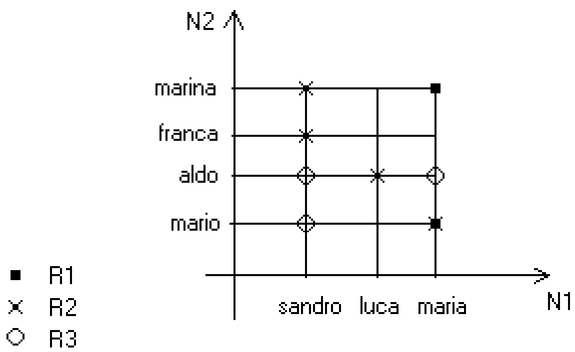
Consideriamo le relazioni :

R1 "avere la stessa lettera iniziale"

R2 "avere lo stesso numero di lettere"

R3 "avere un numero di lettere maggiore".

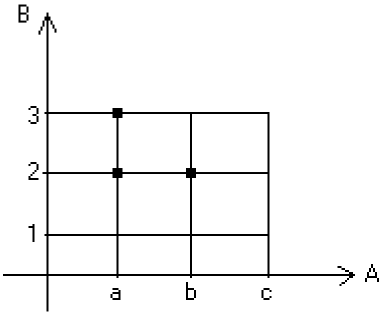
Visualizziamo direttamente le tre relazioni :



04 - Dominio e codominio.

Consideriamo gli insiemi A = {a, b, c} e B = {1, 2, 3} . Costruiamo fra essi la relazione :

R = {(a,2), (a,3), (b,2)}



Chiamiamo **dominio** di una relazione l'insieme degli elementi del primo insieme che sono "coinvolti" nella relazione. Denominiamo il dominio di R col simbolo D(R) .

Chiamiamo **codominio** di una relazione l'insieme degli elementi del secondo insieme che sono "coinvolti"
nella relazione. Denominiamo il codominio di R col simbolo C(R) .

Nell'esempio considerato sopra avremo :

D(R) = {a, b} e C(R) = {2, 3}.

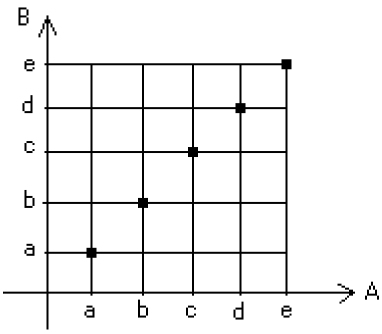
Il dominio ed il codominio di una relazione sono quindi sottoinsiemi rispettivamente del primo e del secondo insieme su cui è costituita la relazione. In particolare il dominio ed il codominio **possono coincidere** con il primo ed il secondo insieme (rispettivamente).

05 - Relazione identica.

Se consideriamo una relazione fra un insieme e se stesso per cui ad ogni elemento corrisponda se stesso, otteniamo una relazione particolarmente importante, la cosiddetta **relazione identica**.

Per esempio, se A = {a, b, c, d, e}, la relazione identica in A (ovvero da A ad A) è :

I = {(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)}



Si noti la particolare forma grafica a "diagonale "di una relazione identica.

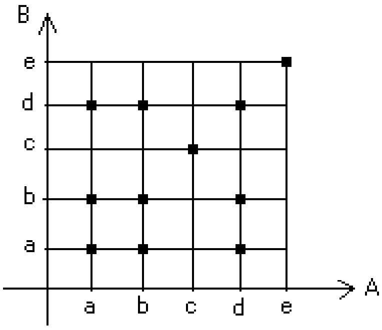
06 - Relazione di equivalenza.

Consideriamo un insieme formato da cinque amici. Lo rappresentiamo come A = {a, b, c, d, e}.
Studiamo la relazione :

R = "a, b, d sono fratelli"

all'interno dell'insieme   A dei cinque amici.

Rappresentiamo graficamente la relazione aggiungendo il fatto che ogni amico può essere considerato **fratello di se stesso** (in matematica si fanno spesso "bizzarre" asserzioni, tipo questa, che però non intaccano la logica, ma possono essere utili a creare opportune generalizzazioni) :



Si vede bene che questa relazione soddisfa tre importanti **proprietà** :

proprietà **riflessiva** : ogni elemento è in relazione con se stesso. Ovvero : a R a

proprietà **simmetrica** : se un elemento è in relazione con un altro, allora il secondo è in relazione col primo. Ovvero : a R b ==> b R a

proprietà **transitiva** : se un elemento è in relazione con un secondo elemento ed il secondo elemento è in relazione con un terzo elemento, allora il primo elemento è in relazione col terzo elemento. Ovvero : a R b , b R c ==> a R c .

(si noti che per denotare che un elemento x è in relazione con un elemento y abbiamo usato la scrittura x R y).

Orbene, tutte le relazioni fra un insieme e se stesso che soddisfano le tre proprietà definite sopra (**riflessiva**, **simmetrica**, **transitiva**) si chiamano **relazioni di equivalenza** e rappresentano un tipo di relazione di fondamentale importanza per tutta la matematica.

Come altro esempio di relazione di equivalenza, consideriamo l'insieme dei triangoli e la relazione U = "essere uguali".

Si può vedere facilmente che la relazione U è una relazione di equivalenza. Infatti

ogni triangolo è uguale a se stesso (proprietà riflessiva)

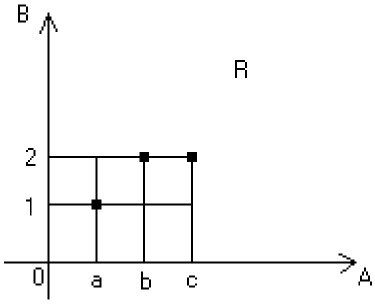
se un triangolo è uguale ad un altro, il secondo è uguale al primo (proprietà simmetrica)

se un triangolo è uguale ad un secondo ed il secondo triangolo è uguale ad un terzo, allora il primo triangolo è uguale al terzo (proprietà transitiva).

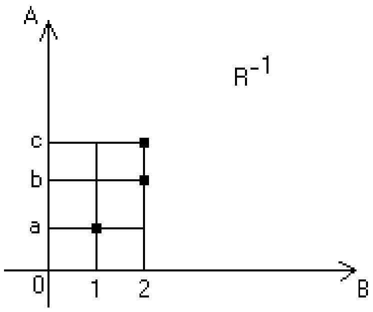
Le relazioni di equivalenza sono alla base della teoria dei numeri.

07 - Relazione inversa.

Consideriamo la seguente **relazione** R da A a B :



Da questa relazione è possibile costruire la **relazione inversa** R^{-1} da B ad A semplicemente invertendo le coppie ordinate. La coppia (a , 1) diventa (1 , a) ecc. . Così facendo si inverte il dominio con il codominio. Si ha cioè :



Abbiamo perciò mostrato con un esempio come si costruisce la relazione inversa di una relazione data.

La definizione matematica esatta di relazione inversa è :

$$R^{-1} = \{(y,x), y \in B, x \in A, (x,y) \in R\} .$$

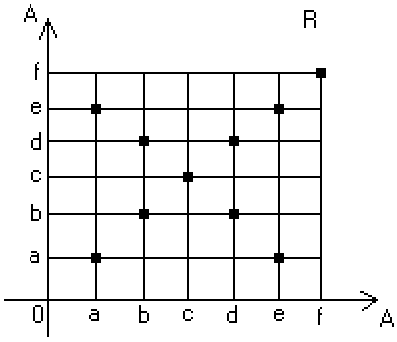
Le relazioni inverse ci saranno molto utili in seguito, specialmente nel grande capitolo delle funzioni numeriche.

08 - Classi di equivalenza. Partizione.

Consideriamo l'insieme di alcuni amici. Chiameremo A questo insieme ed indicheremo con le lettere minuscole i singoli amici. Supponiamo che sia A = {a, b, c, d, e, f} . Supponiamo anche che :

a abbia 15 anni
b " 17 "
c " 20 "
d " 17 "
e " 15 "
f " 50 " .

Creiamo la relazione R da A ad A definita dall'affermazione "avere la stessa età" . Graficamente :



Supponendo che ogni amico abbia la stessa età di se stesso, la relazione R è evidentemente una relazione di equivalenza perché soddisfa alle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Consideriamo ora un elemento dell'insieme A , per esempio a , e costruiamo l'insieme degli elementi in relazione con esso (cioè equivalenti ad esso). Indicando questo insieme col simbolo [a] otterremo allora :

[a] = {a, e} .

Questo insieme si chiama **classe di equivalenza** di a .

Facendo la stessa cosa per gli altri elementi di A (e ripetendo ancora [a]) otteniamo :

[a] = {a, e}
[b] = {b, d}
[c] = {c}
[d] = {b, d}
[e] = {a, e}
[f] = {f}

La definizione matematica di classe di equivalenza è allora :

$$[a] = \{x; x \in A, (a, x) \in R\} .$$

Si noti a questo punto una proprietà molto importante. L'insieme l'**unione di tutte le classi di equivalenza** indotte dalla relazione R sull'insieme A **dà esattamente l'insieme A** .

Si noti anche che le classi diverse sono **disgiunte** a due a due, cioè non hanno elementi in comune.

In altre parole si dice che una relazione di equivalenza induce in un insieme una **partizione** del medesimo in classi di equivalenza, lo scompone cioè nelle sue classi di equivalenza.

Questa proprietà è di estrema importanza ed è, per esempio, alla base della teoria dei numeri.

09 - Relazione d'ordine parziale.

Consideriamo un **insieme** A ed una **relazione** R definita su A . La relazione R sarà allora una relazione da A ad A . Supponiamo che l'insieme A contenga gli elementi a , b , c ecc. cioè sia :

A = {a, b, c, ...} .

Supponiamo che la relazione R soddisfi le seguenti proprietà :

- 1 - Se a è in relazione con b e b è in relazione con a allora a è uguale a b e viceversa.

  Cioè $((a,b)\in R,(b,a)\in R)\Leftrightarrow(a=b)$.

  La doppia freccia significa che la proprietà è vera nei due sensi (letta da sinistra verso destra e viceversa).

  Questa proprietà è **riflessiva** ed **antisimmetrica**.

- 2 - Se a è in relazione con b e b è in relazione con c allora a è in relazione con c .

  Cioè $((a,b)\in R,(b,c)\in R)\Rightarrow((a,c)\in R)$.

  Questa è la proprietà **transitiva**.

La relazione R che gode delle suddette proprietà si chiama **relazione d'ordine parziale** e l'insieme A dotato di una tale relazione si chiama **insieme parzialmente ordinato**.

Una relazione d'ordine parziale si denota con il **simbolo** $\leq$ (**minore uguale**).

Esempi :

- 1 - L'insieme dei numeri dotati dell'usuale relazione di minore uguale $\leq$. La verifica di ciò è immediata.

- 2 - Un insieme di insiemi dotato della relazione di sottoinsieme $\subseteq$. Infatti :

  Se $A\subseteq B$ e $B\subseteq A$ allora A = B e viceversa.

  Se $A\subseteq B$ e $B\subseteq C$ allora $A\subseteq C$.

10 - Relazione d'ordine (totale).

Consideriamo l'**insieme** A definito come sopra ed una **relazione** R definita su di esso.

Supponiamo che la relazione R soddisfi le seguenti proprietà :

- 1 - L'elemento a non è in relazione con se stesso.

  Cioè $(a,a)\notin R$.

  Questa proprietà si dice **antiriflessiva**.

- 2 - Se a è diverso da b allora o a è in relazione con b oppure b è in relazione con a .

  Cioè $(a,b\in A,a\neq b)\Rightarrow\left((a,b)\in R\ \ oppure\ \ (b,a)\in R\right)$.

- 3 - Se a è in relazione con b e b è in relazione con c allora a è in relazione con c .

  Cioè $((a,b)\in R,(b,c)\in R)\Rightarrow((a,c)\in R)$.

  Questa è la proprietà **transitiva**.

La relazione R che gode delle suddette proprietà si chiama **relazione d'ordine (totale)** e l'insieme A dotato di una tale relazione si chiama **insieme (totalmente) ordinato**.

L'aggettivo **totale** viene per brevità sottointeso.

Una relazione d'ordine si denota con il **simbolo** $<$ (**minore**).

Esempio :

- 1 - L'insieme dei numeri dotati dell'usuale relazione di minore $<$. La verifica di ciò è immediata.

- 2 - Un insieme di insiemi dotato della relazione di sottoinsieme proprio $\subset$ non è un insieme ordinato (ovvero $\subset$ non è una relazione d'ordine) perché la seconda condizione non è sempre verificata !!! (per due insiemi disgiunti, per esempio, non può essere che uno sia sottoinsieme dell'altro né che il secondo lo sia del primo)